Wykład 2
Szeregi potęgowe

- Co to jest szereg potęgowy?
- Co znaczy, że szereg potęgowy jest zbieżny?
- Co to jest promień zbieżności szeregu potęgowego?
- Wyznaczanie sumy potęgowego
- Rozwijanie funkcji w szereg potęgowy
  - Szereg Taylora
  - Szereg Maclaurina

Definicja 1. (szereg potęgowy)

Szeregiem potęgowym *o środku w punkcie* $x_0 \in R$ *i współczynnikach* $a_n \in R$, *gdzie* $n = 0,1,2,\dots$.

nazywamy szereg postaci

$$\boldsymbol{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad \textit{gdzie } x \in R.}$$

Uwaga: Przyjmujemy tutaj, że $(x - x_0)^0 = 1$ dla $x = x_0$.

- Przykłady:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^n$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (x+3)^n$, d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{5^n}$.

Definicja 2. (zbieżność szeregu potęgowego w punkcie)

Szereg potęgowy jest zbieżny w punkcie $x = x_1$, *jeżeli szereg liczbowy* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - x_0)^n$ *jest zbieżny.*

Uwaga: Szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a_n}(\mathrm{x} - \mathrm{x_0})^{\mathrm{n}}$ jest zbieżny w punkcie $\mathrm{x} = \mathrm{x_0}$, a jego suma jest równa $\mathrm{a_0}$.

Przykłady:

Podaj punkty, w których szereg może być zbieżny oraz punkty, w których może być rozbieżny.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, b) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n(x-1)^n$, c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n (x+3)^n$, d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+4)^n}{5^n}$.

Definicja 3. (promień zbieżności szeregu potęgowego)

Promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *nazywamy liczbę* $\boldsymbol{R}$ *określoną równością*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad lub \quad R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Twierdzenie 4. (Cauchy-Hadamarda)

Niech R będzie promieniem zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$. *Wówczas:*

- *szereg ten zbieżny w przedziale* $(x_0 - R, x_0 + R)$,
- *szereg ten jest rozbieżny w przedziałach* $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$.
- *Jeżeli szereg jest zbieżny dla każdego* $x \in R$, *to przyjmujemy, że* $R = \infty$.
- *Jeżeli szereg jest zbieżny tylko w* $x = 0$, *to przyjmujemy, że* $R = 0$.
- **Uwaga:** na krańcach przedziału zbieżności szereg może być zbieżny lub rozbieżny.

Z Twierdzenia Cauchy-Hadamarda wynika, że przedział zbieżności szeregu

potęgowego może mieć postać:

- $\{x_0\}$, gdy $R = 0$
- $(x_0 - R, x_0 + R)$
- $\langle x_0 - R, x_0 + R\rangle$
- $(x_0 - R, x_0 + R\rangle$
- $\langle x_0 - R, x_0 + R)$
- $(-\infty, +\infty)$, gdy $R = \infty$.

Przykład. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-2)^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2n+1}$ d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(x+2)^n$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{(n+1)^2 \cdot 2^n}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$ h) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+4)^n}{2^n}$.

$$\boldsymbol{R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}} \quad \textbf{\textit{lub}} \quad \boldsymbol{R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|}.$$

- *szereg ten zbieżny w przedziale* $(\boldsymbol{x_0 - R, x_0 + R})$,
- *szereg ten jest rozbieżny w przedziałach* $(-\infty, \boldsymbol{x_0 - R}) \cup (\boldsymbol{x_0 + R}, +\infty)$.
- *należy sprawdzić zbieżność na krańcach przedziałów zbieżności*

Twierdzenie 7. (o różniczkowaniu szeregu potęgowego)

Jeżeli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *ma niezerowy promień zbieżności* R *i niech* *S(x) oznacza jego sumę dla* $(x_0 - R, x_0 + R)$, *to*

to jego ***suma S(x) jest funkcją różniczkowalną***

oraz

$$\boldsymbol{S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(x-x_0)^n]' =}$$

$$\boldsymbol{= \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n(x-x_0)^{n-1}} \ .$$

Twierdzenie 8. (o całkowaniu szeregu potęgowego)

Jeżeli szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *ma niezerowy promień zbieżności R i niech S(x) oznacza jego sumę dla* $(x_0 - R, x_0 + R)$, *to*

- *jego **suma S(x) jest funkcją całkowalną***

oraz

- $\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^x a_n(x-x_0)^n dx\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\Big|_0^x$

Przykład:

Stosując twierdzenie o różniczkowaniu i całkowaniu szeregów potęgowych

oblicz sumę szeregu

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{3n-1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)n} \cdot x^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3n-2}$

Przykład.

Dany jest szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$. Okazało się, że

Jest to szereg geometryczny, czyli szereg jest zbieżny dla $x \in (-1,1)$

Skoro zbieżny, to jest zbieżny do funkcji $S(x)$.

Tę funkcję $S(x)$ *wyznaczyliśmy **ze wzoru na sumę szeregu potęgowego,** otrzymując*

$$S(x) = \frac{x}{1-x}.$$

Przykład.

Dany jest szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$. Okazało się, że

a) *promień zbieżności* $R = 1$, *czyli szereg jest zbieżny dla* $x \in (-1,1)$.

b) *Skoro zbieżny, to jest zbieżny do pewnej funkcji* $S(x)$.

Tę funkcję $S(x)$ *wyznaczyliśmy* ***różniczkując szereg*** *wyraz po wyrazie, otrzymując*

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{czyli} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \ .$$

Przykład.

Dany jest szereg potęgowy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$. Okazało się, że

a) *promień zbieżności* $R = 1$, *czyli szereg jest zbieżny dla* $x \in (-1,1)$.

b) *Skoro zbieżny, to jest zbieżny do pewnej funkcji* $S(x)$.

Tę funkcję $S(x)$ *wyznaczyliśmy* ***całkując szereg*** *wyraz po wyrazie, otrzymując*

$$S(x) = -\ln|1 - x|, \quad \text{czyli} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln|1 - x|.$$

Dany jest szereg potęgowy

To było

Wyznaczam jego sumę $S(x)$

Mam sumę $S(x)$

To będzie

Poszukam szeregu dla tej sumy

Przykład: Rozwiń w szereg potęgowy funkcje:

1. $f(x) = \frac{1}{1-x}$

2. $f(x) = \frac{1}{1+x}$

3. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

4. $f(x) = ln(1 + x)$

5. $y = arctgx$

Definicja 5. (szereg Taylora)

Niech funkcja f ma w punkcie x_0 pochodne dowolnego rzędu. Szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots$$

nazywamy ***szeregiem Taylora*** *funkcji f o środku w punkcie x_0.*

Jeżeli $x_0 = 0$, to szereg ten nazywamy ***szeregiem Maclaurina*** funkcji f.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots$$

Twierdzenie 6. (o rozwijaniu funkcji w szereg Taylora)

Jeżeli

1. *funkcja f ma w otoczeniu U punktu x_0 pochodne dowolnego rzędu*
2. *dla każdego $x \in U$ spełniony jest warunek*

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$, *gdzie* $R_n(x) = \frac{f^n(c)}{n!}(x - x_0)^n$ *oznacza n-tą resztę we wzorze Taylora dla funkcji f,*

to $$\boldsymbol{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$ *dla każdego $x \in U$.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \cdots$$

Przykład. Wykazać, że

a) $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \ldots . = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad dla\ x \in R$

b) $sinx = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad dla\ x \in R$

c) $cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad dla\ x \in R$

d) $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, dla\ x \in (-1,1)$

e) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, \quad dla\ x \in (-1,1)$

Przykład:

Wyznacz szereg Maclaurina dla funkcji

$a) f(x) = sinx$ b) $f(x) = sin2x$ c) $f(x) = cosx$

d) $f(x) = \frac{1}{1-x}$ e) $f(x) = e^x$ f) $f(x) = \ln(1 + x)$

Twierdzenie

Jeżeli dla każdego x z pewnego otoczenia punktu x_0 zachodzi równość

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

to dla każdego $n \in N$ zachodzi równość

$$c_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \qquad \text{lub równoważnie} \qquad f^{(n)}(x_0) = c_n \cdot n!$$

Przykład

Rozwiń funkcję $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ w szereg potęgowy, a następnie wyznacz

wartość wskazanej pochodnej w punkcie

a) $f(x) = \frac{x^2}{1+x}, \quad f^{(10)}(0)$
b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f^{(8)}(0)$
c) $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}, \quad f^{(5)}(2)$
d) $f(x) = \ln(4+x^2), \quad f^{(8)}(0)$